

Conjuntos Parcialmente Ordenados y Retículos

Álgebra aplicada

Domingo López Rodríguez

Índice de Contenidos

Introducción	3
Bloque I: Posets (Conjuntos Parcialmente Ordenados)	3
Definición de Poset	3
Representación Computacional	4
Diagrama de Hasse	5
Elementos Notables en un Poset	5
Maximales y Minimales	5
Máximo y Mínimo	6
Cotas Superiores e Inferiores	6
Supremo e Ínfimo	7
Extensión Lineal	8
Bloque II: Retículos (Lattices)	9
Definición de Retículo	9
Construcción en $\mathbb{R}$	9
Ejemplos Clásicos de Retículos	9
Cadenas	9
Diamante (M_3) y Pentágono (N_5)	10
Retículo de Divisores	11
Álgebra de Boole	12
Elementos y Propiedades en Retículos	13
Top ($\top$) y Bottom ($\perp$)	13
Átomos y Coátomos	13
Elementos Irreducibles	14
Complemento	15
Distributividad y Álgebras de Boole	15
Notas Adicionales	16

Introducción

El estudio de las **estructuras ordenadas** es fundamental en álgebra, lógica e informática. En este tema exploraremos los **Conjuntos Parcialmente Ordenados (Posets)** y su especialización en **Reticulos (Lattices)**, que proporcionan el marco formal para el Álgebra de Boole, la lógica proposicional y el Análisis Formal de Conceptos.

Nota Histórica: George Boole y Garrett Birkhoff

George Boole (1815-1864), un matemático autodidacta británico, revolucionó la lógica al demostrar que podía tratarse mediante sistemas algebraicos. Su obra *The Laws of Thought* (1854) sentó las bases del Álgebra de Boole. Décadas después, Garrett Birkhoff (1911-1996) formalizó la teoría de retículos, demostrando su aplicación en la lógica, la teoría de conjuntos y la física cuántica.

Librería LatticeTheory

En esta práctica utilizamos la librería LatticeTheory de R, alojada en GitHub. Para instalarla:

```
install.packages("remotes")
remotes::install_github("malaga-fca-group/LatticeTheory")
```

Bloque I: Posets (Conjuntos Parcialmente Ordenados)

Definición de Poset

Definición

Un **poset** (*partial ordered set*) es un par $(X, \leq)$ donde X es un conjunto y $\leq$ es una relación binaria que cumple:

1. **Reflexiva:** $x \leq x$ para todo $x \in X$.
2. **Antisimétrica:** Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.
3. **Transitiva:** Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Si además $\forall x, y \in X$ se cumple $x \leq y$ o $y \leq x$, el orden es **total** y el poset se denomina **cadena**.

Representación Computacional

Una forma computacional de representar un orden parcial es mediante una **matriz cuadrada** A , donde cada fila y columna corresponde a un elemento de X . El valor $a_{i,j} = 1$ indica que el elemento j -ésimo es menor o igual que el i -ésimo; $a_{i,j} = 0$ en caso contrario.

Ejemplo 0.1. Construyamos un poset con 5 elementos $\{a, b, c, d, e\}$:

```
A <- matrix(
  c(
    1, 0, 0, 0, 0,
    1, 1, 0, 0, 0,
    1, 1, 1, 0, 0,
    1, 0, 0, 1, 0,
    1, 1, 1, 1, 1
  ),
  nrow = 5, byrow = TRUE,
  dimnames = list(c("a", "b", "c", "d", "e"),
                  c("a", "b", "c", "d", "e"))
)
my_poset <- Poset$new(A)
my_poset
```

Poset with 5 elements.

Elements: a, b, c, d, e.

Strict comparabilities:

a < b, a < c, a < d, a < e

b < c, b < e

$$c < e$$

$$d < e$$

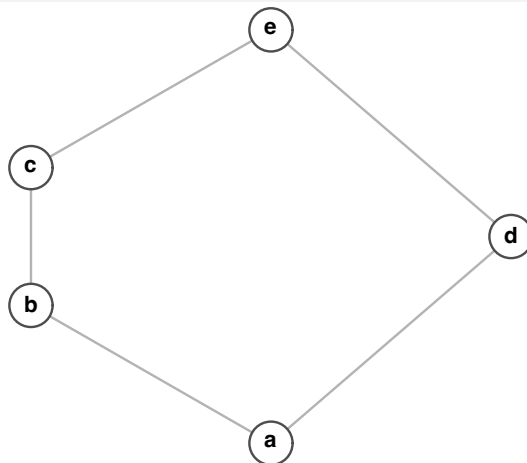
Observamos que, por ejemplo, $a \leq b$, $b \leq c$ y $c \leq e$, pero b y d no son comparables.

Diagrama de Hasse

El **diagrama de Hasse** es una representación simplificada del poset donde se omiten las relaciones reflexivas y transitivas. Si $x < y$ y no existe ningún z con $x < z < y$, dibujamos a y por encima de x y los unimos con una línea.

Ejemplo 0.2.

```
my_poset$plot()
```



En el diagrama, los nodos se ordenan de abajo hacia arriba siguiendo el orden del poset.

Elementos Notables en un Poset

Sea $(X, \leq)$ un poset y $Y \subseteq X$. Definimos los siguientes conceptos:

Maximales y Minimales

Un elemento $a \in Y$ es **maximal** si no existe ningún $b \in Y$, $b \neq a$, con $a \leq b$. Es decir, no hay ningún elemento por encima en Y . Análogamente se define **minimal**.

Ejemplo 0.3.

```
my_poset$maximals("a", "b", "d")
```

```
[1] "b" "d"
```

```
my_poset$minimals("b", "c", "d")
```

```
[1] "b" "d"
```

Los maximales de $\{a, b, d\}$ son b y d (ninguno está por encima del otro). Los minimales de $\{b, c, d\}$ también son b y d (son incomparables).

Máximo y Mínimo

Un elemento $y \in Y$ es el **máximo** si $x \leq y$ para todo $x \in Y$. Es único si existe. Análogamente se define el **mínimo**.

Ejemplo 0.4.

```
my_poset$maximum("a", "b", "c")
```

```
[1] "c"
```

```
my_poset$maximum("a", "b", "d")
```

```
NULL
```

```
my_poset$minimum("a", "b", "d")
```

```
[1] "a"
```

El máximo de $\{a, b, c\}$ es c . Sin embargo, $\{a, b, d\}$ **no tiene máximo** (pues b y d son incomparables), aunque sí tiene mínimo: a .

Cotas Superiores e Inferiores

Un elemento $a \in X$ es **cota superior** de Y si $y \leq a$ para todo $y \in Y$. Es decir, las cotas superiores son elementos de X (no necesariamente de Y) que están por encima de todos los de Y . Análogamente se definen las **cotas inferiores**.

Ejemplo 0.5.

```
my_poset$upper_bounds("a", "b", "d")
```

```
[1] "e"
```

```
my_poset$lower_bounds("b", "c", "d")
```

```
[1] "a"
```

La única cota superior de $\{a, b, d\}$ es e (el único elemento por encima de todos). La única cota inferior de $\{b, c, d\}$ es a .

Supremo e Ínfimo

El **supremo** de Y (denotado $\sup Y$ o $\bigvee Y$) es la menor de las cotas superiores. El **ínfimo** de Y (denotado $\inf Y$ o $\bigwedge Y$) es la mayor de las cotas inferiores.

Relación con máximo y mínimo

Si el supremo de Y existe y pertenece a Y , entonces coincide con el máximo de Y . Recíprocamente, si Y tiene máximo, ese elemento es también supremo de Y . Lo análogo vale para ínfimo y mínimo.

Ejemplo 0.6.

```
my_poset$supremum("b", "c", "d")
```

```
[1] "e"
```

```
my_poset$infimum("b", "c", "d")
```

```
[1] "a"
```

El supremo de $\{b, c, d\}$ es e (la menor cota superior). El ínfimo es a (la mayor cota inferior).

Extensión Lineal

Una **extensión lineal** de $(X, \leq)$ es una relación de orden total $\preceq$ sobre X que preserva el orden: si $a \leq b$ entonces $a \preceq b$. Puede haber muchas extensiones lineales posibles.

Ejemplo 0.7.

```
extension <- my_poset$linear_extension()  
extension
```

Lattice with 5 elements.

Elements: a, b, c, d, e.

Strict comparabilities:

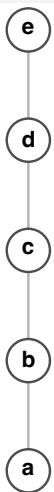
$a < b$, $a < c$, $a < d$, $a < e$

$b < c$, $b < d$, $b < e$

$c < d$, $c < e$

$d < e$

```
extension$plot()
```



La extensión lineal convierte el orden parcial en un orden total compatible.

Bloque II: Retículos (Lattices)

Definición de Retículo

! Definición

Un **retículo** es un poset $(L, \leq)$ donde para cada par de elementos $x, y \in L$ existen su supremo y su ínfimo. Denotamos:

- $x \vee y := \sup\{x, y\}$ (supremo, *join*)
- $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ (ínfimo, *meet*)

Un retículo es **completo** si existe el supremo y el ínfimo de cualquier subconjunto de elementos.

Desde un punto de vista algebraico, un retículo también puede definirse como un conjunto L dotado de dos operaciones $\vee$ y $\wedge$ que satisfacen ciertas leyes (conmutatividad, asociatividad, idempotencia y absorción).

Construcción en R

Si ya tenemos un objeto Poset y es un retículo, podemos convertirlo con `to_lattice()`. También existen retículos predefinidos en la librería.

Ejemplos Clásicos de Retículos

Cadenas

Una cadena es un conjunto dotado de un **orden total**.

Ejemplo 0.8.

```
my_chain <- chain(4)
my_chain
```

Lattice with 4 elements.

Elements: a, b, c, d.

Strict comparabilities:

$a < b$, $a < c$, $a < d$

$b < c$, $b < d$

$c < d$

```
my_chain$plot()
```



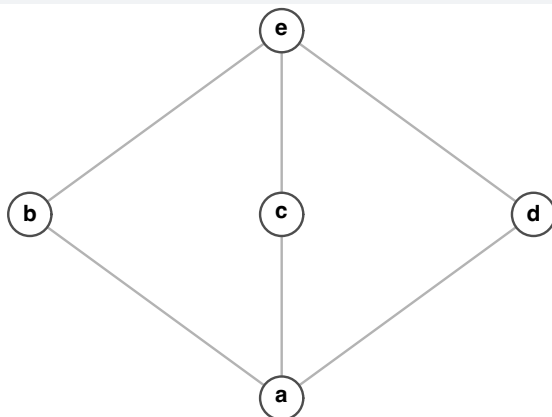
Diamante (M_3) y Pentágono (N_5)

Estos dos retículos son fundamentales en la teoría, pues caracterizan la distributividad:

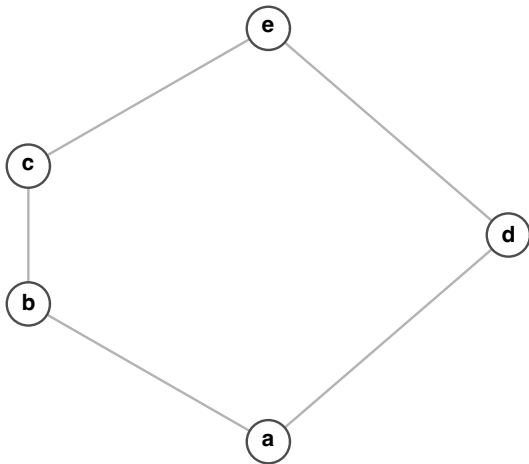
Ejemplo 09.

```
D <- diamond()
```

```
D$plot()
```



```
P <- pentagon()
P$plot()
```



Retículo de Divisores

El retículo de los divisores de un entero positivo n se denota $(\mathcal{D}_n, |)$. La relación de orden es la divisibilidad. En este retículo:

- El **supremo** $a \vee b$ es el **mínimo común múltiplo** $\text{mcm}(a, b)$.
- El **ínfimo** $a \wedge b$ es el **máximo común divisor** $\text{mcd}(a, b)$.

Ejemplo 0.10.

```
div <- divisors_lattice(60)
div
```

Lattice with 12 elements.

Elements: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Strict comparabilities:

1 < 2, 1 < 3, 1 < 4, 1 < 5, 1 < 6, 1 < 10, 1 < 12, 1 < 15, 1 < 20, 1 < 30, 1 < 60

2 < 4, 2 < 6, 2 < 10, 2 < 12, 2 < 20, 2 < 30, 2 < 60

3 < 6, 3 < 12, 3 < 15, 3 < 30, 3 < 60

4 < 12, 4 < 20, 4 < 60

5 < 10, 5 < 15, 5 < 20, 5 < 30, 5 < 60

6 < 12, 6 < 30, 6 < 60

10 < 20, 10 < 30, 10 < 60

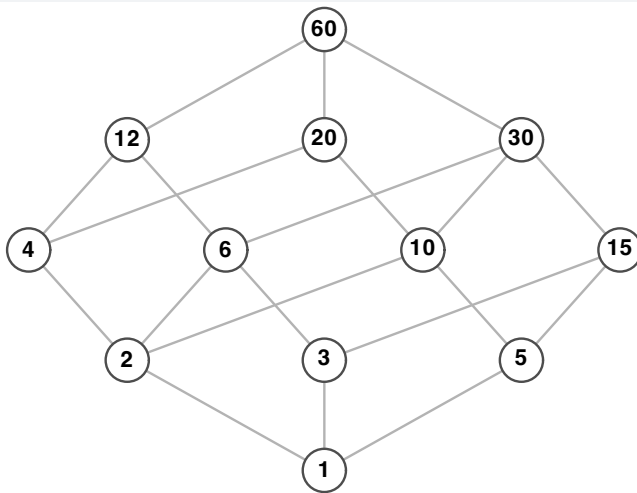
12 < 60

15 < 30, 15 < 60

20 < 60

30 < 60

```
div$plot()
```



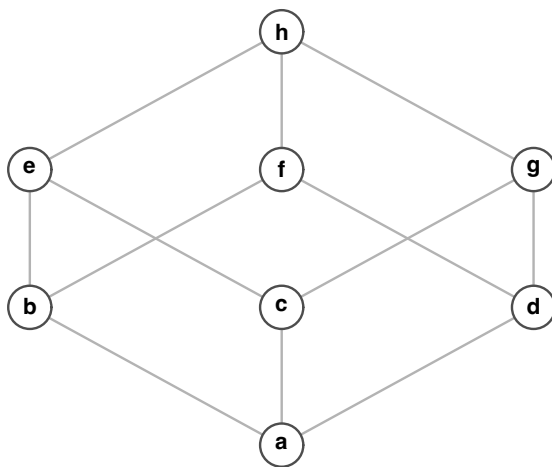
Álgebra de Boole

El retículo de partes de un conjunto $\mathcal{P}(S)$ con la inclusión $\subseteq$ es el ejemplo más puro de un retículo distributivo y complementado.

Ejemplo 0.11.

```
B <- boole(3)
```

```
B$plot()
```



Elementos y Propiedades en Retículos

Como un retículo es un caso particular de poset, todas las funciones anteriores (maximals, minimals, etc.) siguen siendo válidas. Pero la estructura más rica permite definir nuevos conceptos.

Top ($\top$) y Bottom ($\perp$)

Un retículo acotado tiene un elemento **máximo** ($\top$, *top*) y un **mínimo** ($\perp$, *bottom*). El top es el elemento neutro del operador $\wedge$ y el bottom lo es del operador $\vee$.



Nota

Todo retículo **finito** es completo y acotado.

Los métodos correspondientes son `top()` y `bottom()`.

Átomos y Coátomos

Un **átomo** es un vecino superior inmediato de $\perp$. Un **coátomo** es un vecino inferior inmediato de $\top$. Las funciones son `atoms()` y `coatoms()`.

Ejemplo 0.12.

```
div <- divisors_lattice(60)
div$atoms()
```

```
[1] "2" "3" "5"
```

```
div$coatoms()
```

```
[1] "12" "20" "30"
```

Los átomos del retículo de divisores de 60 están directamente relacionados con los **factores primos** de 60.

Elementos Irreducibles

Un elemento $x \in L$ es **$\vee$ -irreducible** (*join-irreducible*) si no se puede expresar como supremo de dos elementos distintos a él. Gráficamente, son los que solo tienen **un vecino inferior**.

Un elemento $x \in L$ es **$\wedge$ -irreducible** (*meet-irreducible*) si no se puede expresar como ínfimo de dos elementos distintos a él. Gráficamente, tienen **un solo vecino superior**.

Teorema de Representación de Birkhoff

Cualquier elemento de un retículo finito distributivo se puede escribir de forma única (salvo redundancias) como supremo de elementos $\vee$ -irreducibles.

Ejemplo 0.13.

```
div$join_irreducibles()
```

```
[1] "2" "3" "4" "5"
```

```
div$meet_irreducibles()
```

```
[1] "12" "15" "20" "30"
```

Complemento

En un retículo acotado, $\hat{x}$ es **complemento** de x si $x \vee \hat{x} = \top$ y $x \wedge \hat{x} = \perp$. El complemento no tiene por qué existir, y de existir, no tiene por qué ser único.

Ejemplo 0.14.

```
P <- pentagon()
P$complements("d")
```

```
[1] "b" "c"
```

En el pentágono, el elemento d tiene **dos** complementos: b y c . Esto ocurre porque el pentágono **no es distributivo**.

Distributividad y Álgebras de Boole

Un retículo $(L, \vee, \wedge)$ es **distributivo** si para todo $x, y, z \in L$:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

⚠ Teorema de Birkhoff

Un retículo es distributivo **si y solo si** no contiene subretículos isomorfos al Diamante (M_3) ni al Pentágono (N_5).

Además, en un retículo distributivo, si un elemento tiene complemento, éste es **único**.

! Definición: Álgebra de Boole

Un **Álgebra de Boole** es un retículo acotado, distributivo y complementado. Es la estructura algebraica que subyace a la lógica proposicional clásica.

Ejemplo 0.15.

```
B <- boole(3)
```

```
# Los elementos de un álgebra de Boole con 3 átomos
```

```
B$atoms()
```

```
[1] "b" "c" "d"
```

```
# El complemento de un átomo es único (gracias a la distributividad)
```

```
B$complements(B$atoms()[1])
```

```
[1] "g"
```

En un álgebra de Boole, cada elemento tiene un **único** complemento.

Notas Adicionales

En este tema nos hemos centrado en operar y razonar sobre retículos y conjuntos parcialmente ordenados. Conceptos como **subretículos**, **isomorfismos de retículos** y **homomorfismos** se tratan en mayor profundidad en el material teórico de clase. Para completar la parte teórica, es imprescindible considerar el material proporcionado en clase y disponible en el campus virtual.