

Hoja de Prácticas: Retículos

Álgebra aplicada

Domingo López Rodríguez

Índice de Contenidos

Ejercicios sobre Posets	3
Ejercicios sobre Retículos	4

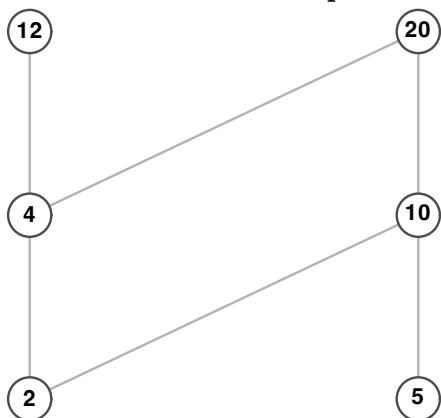
Instrucciones

Realiza los siguientes ejercicios utilizando la librería `LatticeTheory` en R. Entrega un documento (PDF generado con Quarto o RMarkdown) que incluya el código, los resultados y una breve explicación razonada de cada paso.

Ejercicios sobre Posets

Ejercicio 1: Construcción de un Poset

Escribir el código necesario para reproducir el siguiente diagrama de Hasse, basado en la relación de divisibilidad para el conjunto $\{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$.



Ejercicio 2: Maximales y Minimales

Del poset anterior, calcula mediante código los elementos **maximales** y **minimales** del subconjunto $Y = \{2, 4, 12, 20\}$.

Ejercicio 3: Máximo y Mínimo

Para el mismo poset:

- Calcula el máximo y el mínimo (si existen) de $\{2, 4, 5, 20\}$.
- Calcula el máximo y el mínimo (si existen) de $\{2, 4, 12, 20\}$.
- Propón un subconjunto Y que tenga cotas superiores e inferiores pero carezca de máximo y mínimo.

🔥 Ejercicio 4: Cotas superiores e inferiores

En el poset del ejercicio 1:

- a) Calcula las cotas superiores e inferiores del conjunto $Y = \{4, 10\}$.
- b) ¿Cuáles son las cotas superiores y las inferiores de $\{4, 10, 12\}$?
- c) Propón un conjunto que no tenga ni cotas superiores ni cotas inferiores.

🔥 Ejercicio 5: Supremo e Ínfimo

Sigue con el poset del ejercicio 1:

- a) Propón un conjunto Y_1 que tenga supremo e ínfimo.
- b) Propón un conjunto Y_2 que tenga supremo pero **no** máximo.

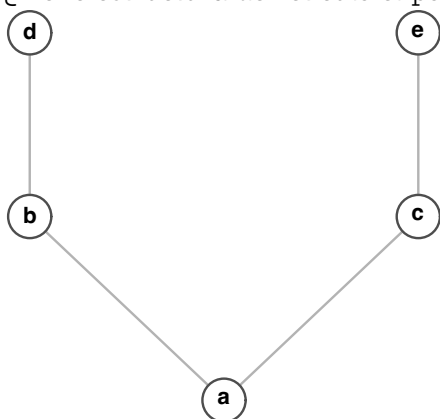
Ejercicios sobre Retículos

🔥 Ejercicio 6: ¿Es un Retículo?

¿Tiene estructura de retículo el poset del ejercicio 1? Justifica tu respuesta. Si no lo es, indica qué par de elementos no posee supremo o ínfimo.

🔥 Ejercicio 7: ¿Retículo o no?

¿Tiene estructura de retículo el poset dado por el siguiente diagrama de Hasse?



Ejercicio 8: Retículo de Divisores

Construye el retículo de los divisores de 90 y dibuja su diagrama de Hasse. Este será el retículo que usaremos en el resto de los ejercicios de esta sección.

Ejercicio 9: Top y Bottom

¿Cuáles son los elementos $\top$ y $\perp$ del retículo pentágono? ¿Y del diamante? ¿Y del de los divisores de 90?

Ejercicio 10: Átomos y Coátomos

Determina los **átomos** y **coátomos** del retículo de los divisores de 90. ¿Qué relación tienen los átomos con los factores primos de 90?

Ejercicio 11: Elementos Irreducibles

Determina los elementos $\vee$ -**irreducibles** y $\wedge$ -**irreducibles** del retículo de los divisores de 90. ¿Qué relación existe entre los $\vee$ -irreducibles y la factorización en producto de primos de 90?

Ejercicio 12: Complementos

¿Existe algún elemento en el retículo de los divisores de 90 que **no** tenga complemento? ¿Y algún elemento con **más de un** complemento? Justifica tus respuestas.